

DOI: 10.7652/xjtuxb201609002

新型复合摆线外啮合圆柱齿轮副的传动特性分析

韩振华, 石万凯, 肖洋轶, 徐浪
(重庆大学机械传动国家重点实验室, 400030, 重庆)

摘要: 基于传统摆线成形原理,提出了摆线成形的二连杆等效机构转化方法,得到了 $n+1$ 连杆机构生成广义 n 阶摆线轨迹的运动规律,推导并建立了可用于齿轮传动的新型四阶复合摆线齿廓方程;基于微分几何及共轭啮合理论,推导了复合摆线齿廓的共轭齿廓方程,分析了该新型齿轮副的压力角、曲率、重合度、滑动率等啮合特性;进行了齿轮副三维实体模型的精确构建,并利用有限元法分析了该齿轮副的强度特性。研究表明:当齿高确定时,分度圆压力角由齿形调控系数 f_1 控制;齿廓曲线是由凹凸弧组成的光滑曲线,且传动过程始终为凹凸齿面线接触啮合传动,理论上具有较高的接触疲劳强度;相对于渐开线齿轮,复合摆线齿轮副具有较高的重合度、极小的滑动率以及较高的弯曲强度和接触强度。最后,加工了齿轮副试验样件,并在 FZG 齿轮试验机上测试了不同工况下的传动效率,结果表明:复合摆线齿轮副的传动效率随加载扭矩在 97.30%~99.00% 范围内呈正相关变化,且高于同工况下的渐开线齿轮副,具有工程应用价值。

关键词: 复合摆线齿轮; 齿轮传动; 啮合原理; 传动特性
中图分类号: TH132 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)09-0010-10

Analysis on Transmission Characteristics of Novel Composite Cycloid
Cylindrical Gears for External Driving

HAN Zhenhua, SHI Wankai, XIAO Yangyi, XU Lang
(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Based on the generation principle of traditional cycloid curves, a transforming method from cycloid curve generation to two-link equivalent mechanism is proposed, and n th-order cycloid motion is generalized using $n+1$ link mechanism. Then the novel fourth-order composite cycloid equation for gear driving is derived. Based on differential geometry and conjugate engagement theory, conjugate profile equation of composite cycloid tooth profile curve is deduced. The pressure angle, curvature, contact ratio and sliding ratio of the composite cycloid gear driving are discussed. The composite cycloid gears are modeled accurately, and the strength characteristic of this drive is evaluated by FEM method simultaneously. The pressure angle of reference circle is controlled by the regulation coefficient of tooth profile when the tooth height is determined. The profile curve is formed smoothly by concave and convex arcs, and the concave-convex tooth surface is engaged by line contact in driving process, resulting in high contact fatigue strength. Compared with involute gear, a superior contact ratio and an incredibly small sliding ratio are demonstrated in composite cycloid tooth profile, and greater tooth root bending strength and surface contact strength are present in finite element method. In addition,

experimental gear samples are machined, and its transmission efficiencies under different operating conditions are measured with FZG gear testing machine. The testing results show that the transmission efficiencies of the composite cycloid gears in the range of 97.30% to 99.00% are positively correlated with the loading torque. Importantly, they are higher compared with the involute gears under the same operating conditions. It is concluded that the composite cycloid gears show a remarkable engineering application value.

Keywords: composite cycloid gear; gear drive; engaging principle; transmission characteristics

齿轮作为动力传动装置的关键基础件,在采煤机截割传动机构、卫星天线指向机构、直升机旋翼主减速器、高速列车齿轮箱及舰船推进传动系统等关键装备中发挥着不可替代的作用。近年来,上述装备领域对齿轮传动系统提出了高功率密度、高速、高精度及高可靠性等高性能要求,而高性能齿轮的主要技术指标集中体现于更高的弯曲强度、接触强度和传动效率^[1]。共轭齿廓曲线在很大程度上决定着齿轮副的传动性能,开展新型齿廓共轭传动理论研究,可以为新型高性能齿轮研究提供很好的技术保障,也是提高齿轮传动性能的重要理论基础。

摆线针轮传动中,摆线轮齿廓具有滑动率低、齿根弯曲强度高、齿面接触强度高优点,这些优势正是现今应用最广泛的渐开线齿廓所缺少的,然而摆线齿廓由于啮合角变化大、传递效率低等问题,应用范围受到了很大限制,无法用于外啮合齿轮动力传动,只在摆线针轮行星传动、钟表齿轮、转子泵等特殊领域得以应用,所以国内外的大多数研究也多集中在这几个方面:Chen等提出了二次包络摆线行星齿轮副,研究了其啮合特性和动力学特性^[2];Li利用接触力学和有限元法分析了摆线针轮行星传动的接触特性和载荷分布^[3];Hsieh研究了不同摆线针轮传动类型的动力学特性^[4],并且对摆线转子泵进行了椭圆齿形的创新研究^[5];Litivin等研究了钟表摆线齿轮的啮合原理,并系统地归纳总结了摆线齿廓在转子泵领域的应用理论^[6];Ivanovic和Gamez-Montero分别就摆线转子泵的滑动率和接触问题进行了研究^[7-8]。

随着人们对摆线齿形研究的重视,越来越多的学者开始研究能用于外啮合动力传动的新型摆线类齿廓,比较有影响的是封闭式泛摆线齿廓^[9]及新型短幅外摆线和平摆线组合齿廓^[10],这2种新型摆线齿廓对相关研究有着重要的指导作用。另外,薛云娜等研究了摆线齿条和滚柱齿轮传动机构,该机构具有双向零间隙高精度传动的优点^[11]。总体来说,国内外对可用于动力传动的外啮合摆线类齿廓研究

得相对较少,研究具有动力传动优势的摆线类齿廓曲线对提高齿轮传动性能具有重要意义。

本文在分析传统摆线成形原理的基础上,对其成形轨迹进行了二连杆等效机构转化,并提出了 $n+1$ 连杆机构的广义 n 阶摆线运动规律;在此基础上,分析了新型复合摆线齿廓的成形原理,得到了复合摆线可用于齿轮传动的条件,提出了新型复合摆线齿轮的传动形式,并建立了复合摆线齿廓曲线共轭啮合理论;从压力角、曲率、重合度和滑动率等方面研究了复合摆线齿轮副的传动特性;建立了精确的实体模型,利用有限元法分析了齿轮副的强度特性;最后,加工出了齿轮副试验样件,利用FZG齿轮试验机测试了齿轮副的传动效率。

1 复合摆线成形原理

1.1 摆线成形原理及连杆运动等效转化

摆线成形方法主要有外切外滚法、内切内滚法、内切外滚法^[12]以及包络运动法^[2]。对于外切外滚法和内切内滚法,如图1所示,滚圆(半径为 r_g ,圆心为 o_v)沿着基圆(半径为 r_0 ,圆心为 o_c)外切或内切做纯逆时针滚动时,滚圆上一点或与滚圆固结的一点 M 形成的轨迹即为摆线。图1中, α_c 为展形起始角,起始位置 $o_c o_v$ 与 x 轴重合, M 点位于 $o_c o_v$ 所在的直线上。外切外滚法生成外摆线,轨迹方程为式(1);内切内滚法生成内摆线,轨迹方程为式(2)。

$$\left. \begin{aligned} x(\alpha) &= e_0 \cos \alpha \pm e_1 \cos[(z+1)\alpha] \\ y(\alpha) &= e_0 \sin \alpha \pm e_1 \sin[(z+1)\alpha] \\ e_0 &= r_0 + r_g \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x(\alpha) &= e_0 \cos \alpha \pm e_1 \cos[(z-1)\alpha] \\ y(\alpha) &= e_0 \sin \alpha \mp e_1 \sin[(z-1)\alpha] \\ e_0 &= r_0 - r_g \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $e_1 = |o_1 M| = \lambda_1 r_g$, λ_1 为幅长系数; z 为整数, $z = r_0 / r_g$,表示摆线的周期数;符号“ $\pm$ ”“ $\mp$ ”表示起始位置 M 点与直线 $o_c o_v$ 的位置关系,若 M 点位于 o_v 的右边,方程(1)、(2)均取上面的符号,若 M 点位于 o_v 的左边,方程(1)、(2)均取下面的符号。

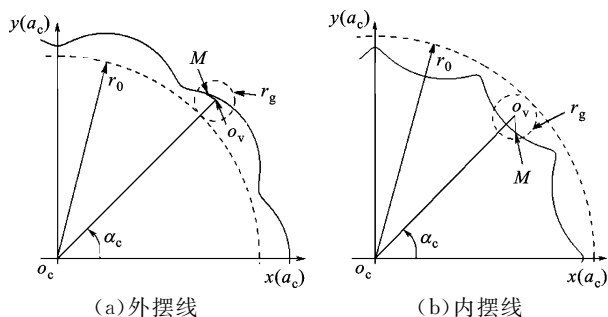


图1 摆线成形原理

若 M 点在滚圆上, 即 $\lambda_1 = 1$, 产形轨迹为等幅外摆线和等幅内摆线; 若 M 点在滚圆内, 即 $0 < \lambda_1 < 1$, 产形轨迹分别为短幅外摆线和短幅内摆线; 若 M 点在滚圆外, 此时 $\lambda_1 > 1$, 则相应地生成长幅外摆线和长幅内摆线。为便于描述, 将上述 6 种摆线统称为广义摆线。

对广义摆线成形运动进行等效机构转化, 如图 2 所示, 广义摆线的成形原理可看作是二连杆机构从动杆 $o_v M$ 上 M 点的运动轨迹。图 2 中, $o_c o_v$ 为连架杆, $o_v M$ 为从动杆。由 M 点的轨迹方程可以看出, 摆线的几何形状主要由 r_0 、 r_g 和 λ_1 控制, 由于控制参数单一, 限制了摆线齿廓的应用范围, 使其只在摆线针轮行星传动、钟表齿轮和转子泵等特殊领域得以应用。

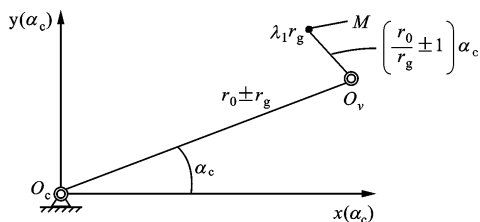


图2 摆线成形原理的二连杆机构等效转化

1.2 连杆机构的 n 阶摆线运动

为使摆线齿廓能有效地用于平行轴外啮合动力传动, 需增加摆线齿形的调控参数, 改变摆线的几何特性, 增加齿高和重合度, 以增强传动的平稳性。基于摆线成形的二连杆等效机构转化方法, 将二连杆运动机构扩展到 $n+1$ 连杆运动机构来构建新型摆线曲线, 如图 3 所示。在图 3 中, 运动起始位置各连杆的端点 A_{n-1} 依次位于 A_n 的左端, 运动方向均为逆时针, e_n 为连杆长度, ω_i 为各连杆的角速度 ($i=1 \sim n+1$), α_n 为各连杆转动时间 t 后的转角。将 $n+1$ 连杆机构末端运动轨迹定义为广义 n 阶摆线, 轨迹方程的复数和指数形式为

$$l(\alpha_0) = x(\alpha_0) + iy(\alpha_0) = \sum_{i=1}^{n+1} e_{i-1} e^{i\omega_{i-1}t},$$

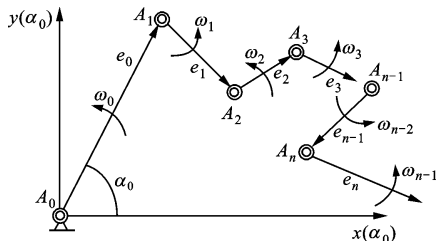
$$\alpha_{i-1} = \omega_{i-1}t \quad (3)$$

将方程(3)写成参数方程形式

$$\left. \begin{aligned} x(\alpha_0) &= e_0 \cos \alpha_0 + e_1 \cos \alpha_1 + \cdots + e_n \cos \alpha_n \\ y(\alpha_0) &= e_0 \sin \alpha_0 + e_1 \sin \alpha_1 + \cdots + e_n \sin \alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

根据连杆机构的几何特性, 当连杆机构各杆的长度确定时, 运动轨迹具有唯一性, 即改变各连杆的运动起始位置只与式(4)中 e_n 前的符号有关, 不影响机构末端的整体运动轨迹。

将式(4)定义为广义 n 阶摆线方程。根据定义可知, 1.1 节中的广义摆线均可看作一阶摆线。

图3 $n+1$ 连杆运动与广义 n 阶摆线成形原理

1.3 二阶、三阶与四阶复合摆线

为从根本上改变摆线的几何特性, 在二连杆运动形成一阶摆线的基础上, 参照广义 n 阶摆线, 当三连杆、四连杆与五连杆机构所连接的各圆依次逆时针做内滚、外滚运动时, 连杆末端运动形成的周期性轨迹曲线称为二阶、三阶与四阶复合摆线, 根据广义摆线、一阶摆线和广义 n 阶摆线的运动规律, 可得到 3 种复合摆线的曲线方程形式为

$$\left. \begin{aligned} x(\alpha_1) &= r_1 \cos \alpha_1 - c_1 \cos(z-1)\alpha_1 - c_{v1} \cos(z+1)\alpha_1 - \\ &\quad c_2 \cos(2z-1)\alpha_1 + c_{v2} \cos(2z+1)\alpha_1 \\ y(\alpha_1) &= r_1 \sin \alpha_1 + c_1 \sin(z-1)\alpha_1 - c_{v1} \sin(z+1)\alpha_1 + \\ &\quad c_2 \sin(2z-1)\alpha_1 + c_{v2} \sin(2z+1)\alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: r_1 、 c_1 、 c_{v1} 、 c_2 与 c_{v2} 为各连杆的长度; α_1 为起始转角; z 为曲线周期数。当 $c_{v1} = c_1 \neq 0$ 、 $c_{v2} = c_2 = 0$ 时, 式(5)表示二阶复合摆线; 当 $c_{v1} = c_1 \neq 0$ 、 $c_2 \neq 0$ 、 $c_{v2} = 0$ 时, 式(5)表示三阶复合摆线; 当 $c_{v1} = c_1 \neq 0$ 、 $c_{v2} = c_2 \neq 0$ 时, 式(5)表示四阶复合摆线。暂不考虑顶隙系数 c^* , 可求得相应的复合摆线齿廓参数, 如表 1 所示。

表 1 中, $r=0.5mz$ (m 为模数)。对表 1 中的齿廓参数进行分析, 可得到以下结果。

(1) 对于三阶复合摆线, 当分度圆确定时, c_1 主要控制齿形高度, 故将 c_1 定义为齿高调控参数, 令

$$c_1 = h_1 m \quad (6)$$

式中: h_1 定义为齿高系数。

表 1 复合摆线齿廓参数

齿廓参数	二阶复合摆线	三阶复合摆线	四阶复合摆线
分度圆半径 r	r_1	r_1+c_2	r_1
齿根圆半径 r_f	r_1-2c_1	$r_1-2c_1-c_2$	r_1-2c_1
齿顶圆半径 r_a	r_1+2c_1	$r_1+2c_1-c_2$	r_1+2c_1
齿根高 h_f	$2c_1$	$2(c_1+c_2)$	$2c_1$
齿顶高 h_a	$2c_1$	$2(c_1-c_2)$	$2c_1$

当考虑齿顶高系数 h_a^* 和顶隙系数 c^* 时,设该齿廓全齿高 h 为

$$h=4c_1-c^*m=2h_a^*m+c^*m \tag{7}$$

联立式(6)、式(7)推导可得

$$c_1=\frac{(h_a^*+c^*)m}{2} \tag{8}$$

$$h_1=\frac{h_a^*+c^*}{2} \tag{9}$$

(2)对于三阶复合摆线,若考虑顶隙,则无法用统一的齿顶高系数 h_a^* 和顶隙系数 c^* 定义齿形,不利于齿轮的参数化设计及后续传动特性的分析,故本文不研究三阶复合摆线。

(3)对于四阶复合摆线,当齿高确定时,通过调节 c_2 可以控制齿形的几何形状,故 c_2 定义为齿形调控参数,令

$$c_2=f_1c_1 \tag{10}$$

式中: f_1 定义为齿形调控系数,通过调节 f_1 可以优化复合摆线的几何特性。根据式(10)可求得

$$c_2=\frac{f_1(h_a^*+c^*)m}{2} \tag{11}$$

取模数 $m=4\text{ mm}$,齿数 $z=24$, $c_1=2\text{ mm}$,可分别求得图 4 中 $f_1=0.01,0.05,0.1$ 时的四阶复合摆线。从图 4 可以看出,齿形调控系数 f_1 的变化能显著改变齿形的几何形状。

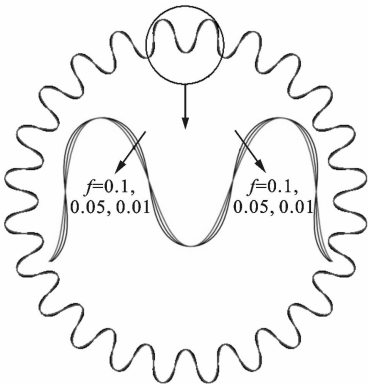


图 4 齿形调控系数 f_1 对四阶复合摆线齿形的影响

1.4 n 阶复合摆线

根据前面的分析,可得到 $n+1$ 连杆结构所连接的各圆依次做内滚、外滚、内滚运动时,连杆末端形成的 n 阶复合摆线轨迹曲线方程,过程同前,不再一一描述。当 $n\geqslant 5$ 时,可推导出 $c_n=r_1\prod_{i=0}^n\lambda_i/z^n$ (r_1 为主动杆的长度, λ_i 表示各杆长之间的关系),可见随着阶数的增加,末端连杆长度呈指数级下降。考虑到曲线敏感性、加工精度及实际应用等各方面因素的影响,本文不讨论五阶以上的高阶数复合摆线的几何特性。

由表 1 的分析结果可知:当齿数 z 、模数 m 、齿顶高系数 h_a^* 和顶隙系数 c^* 确定时,二阶混合摆线的封闭曲线便随之确定,而渐开线齿轮在上述参数确定的情况下还可根据实际应用情况调整压力角;三阶复合摆线不利于齿轮的参数化设计及后续的传动特性研究。

综上所述,本文选择四阶复合摆线(下文简称复合摆线)作为齿廓曲线,建立复合摆线齿廓曲线外啮合共轭传动理论,并开展其传动特性方面的研究。

2 复合摆线外啮合齿轮副共轭原理

2.1 坐标系及坐标变换

以四阶复合摆线齿廓外啮合传动为研究对象,采用运动学法求解复合摆线的共轭齿廓,利用右手法则建立图 5 所示的坐标系。其中,固定坐标系 $S_{f1}(o_{f1}x_{f1}y_{f1}z_{f1})$ 、 $S_{f2}(o_{f2}x_{f2}y_{f2}z_{f2})$ 分别与箱体固联,动坐标系 $S_1(o_1x_1y_1z_1)$ 、 $S_2(o_2x_2y_2z_2)$ 分别与主动齿轮 1、从动齿轮 2 固联, z_{f1} 轴、 z_1 轴和 z_{f2} 轴、 z_2 轴分别与齿轮 1、齿轮 2 的旋转轴重合,固定坐标系 $S_{m1}(o_{m1}x_{m1}y_{m1}z_{m1})$ 的原点 o_{m1} 与节点 P 重合, x_{f2} 轴平行于 x_{f1} 轴,坐标系 S_1 到坐标系 S_2 、 S_{m1} 的坐标变换矩阵分别为 M_{21} 、 M_{01} 。

齿轮 1、2 的中心距为 a ,传动比为 i_{21} ,齿数分别为 z_1 、 z_2 ,节圆半径分别为 r_1 、 r_2 ,并且与分度圆重合,角速度分别为 ω_1 、 ω_2 ,方向如图 5 所示。在初始位置,坐标系 S_1 和 S_{f1} 重合、 S_2 和 S_{f2} 重合,齿轮 1、2 分别以角速度 ω_1 和 ω_2 绕 z_1 轴、 z_2 轴运动一段时间 t 后,转过的角度分别为 φ_1 、 φ_2 。根据传动比的定义,可得到关系式

$$\frac{1}{i_{21}}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{r_2}{r_1} \tag{12}$$

对式(5)进行和差化积化简,可得到四阶复合摆线齿廓曲线 Σ_1 在坐标系 S_1 中的表达式

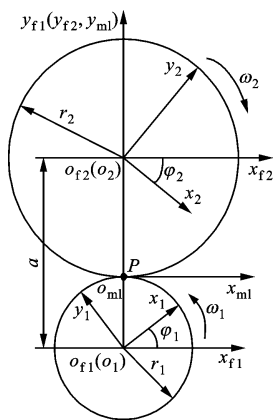


图5 平行轴外啮合共轭传动坐标系

$$\mathbf{r}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} x_1(\alpha) & y_1(\alpha) & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} r_1 \cos \alpha - 2c_1 \cos(z_1 \alpha) \cos \alpha - 2c_2 \sin(2z_1 \alpha) \sin \alpha \\ r_1 \sin \alpha - 2c_1 \cos(z_1 \alpha) \sin \alpha + 2c_2 \sin(2z_1 \alpha) \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{r}_1(\alpha)$ 、 α 分别为齿廓曲线 Σ_1 在坐标系 S_1 中的矢径和角度参量。

根据共轭曲线啮合原理, 啮合方程可表示为

$$f(\alpha, \varphi_1) = \mathbf{N}_1 \mathbf{V}_1^{(12)} = 0 \quad (14)$$

式中: $f(\alpha, \varphi_1)$ 为啮合函数; $\mathbf{V}_1^{(12)}$ 、 $\mathbf{N}_1$ 为齿廓曲线 Σ_1 在啮合点处与共轭齿廓曲线 Σ_2 的相对运动速度矢量和单位法向量。根据微分几何原理, 可推导出啮合方程的通用表达式

$$f(\alpha, \varphi_1) = A_1 \cos(\alpha + \varphi_1) + B_1 \sin(\alpha + \varphi_1) + C_1 = 0 \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= r_1 [r_1 - 2c_1 \cos(z_1 \alpha) + 4f_1 c_1 z_1 \cos(2z_1 \alpha)] \\ B_1 &= 2c_1 r_1 [z_1 - 2f_1 \cos(z_1 \alpha)] \sin(z_1 \alpha) \\ C_1 &= 2c_1 z_1 [-r_1 \sin(z_1 \alpha) + c_1 \sin(2z_1 \alpha) - 2f_1^2 c_1 \sin(4z_1 \alpha)] \end{aligned}$$

2.2 共轭齿廓方程

利用坐标变换矩阵 $\mathbf{M}_{21}$ 和啮合方程(15), 可求得复合摆线共轭齿廓 Σ_2 在坐标系 S_2 中的表达式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_2(\alpha, \varphi_1) &= \begin{bmatrix} x_2(\alpha) & y_2(\alpha) & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{M}_{21}(\varphi_1) \mathbf{r}_1(\alpha) \\ f(\alpha, \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $\mathbf{r}_2(\alpha, \varphi_1)$ 为共轭齿廓曲线 Σ_2 在坐标系 S_2 中的矢径, 其通用表达式为

$$\left. \begin{aligned} x_2(\alpha) &= -D_1 D_3 + D_2 D_4 + r_1 (1 + i_{21}) \sin(i_{21} \varphi_1) \\ y_2(\alpha) &= D_1 D_4 + D_2 D_3 - r_1 (1 + i_{21}) \cos(i_{21} \varphi_1) \\ z_2(\alpha) &= 1 \\ A_1 \cos(\alpha + \varphi_1) + B_1 \sin(\alpha + \varphi_1) + C_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中 $D_1 = \sin[\alpha + (1 + i_{21}) \varphi_1]$, $D_2 = \cos[\alpha + (1 + i_{21}) \varphi_1]$, $D_3 = 2f_1 c_1 \sin(2z_1 \alpha)$, $D_4 = r_1 - 2c_1 \cos(z_1 \alpha)$ 。

2.3 啮合线方程

将理论接触点在动坐标系中的坐标值转换到固定坐标系, 即可得到齿轮副的啮合线方程。利用坐标变换矩阵 $\mathbf{M}_{01}$, 可得到复合摆线齿廓共轭传动的啮合线 Σ_{ml} 的矢径 $\mathbf{r}_{ml}(\alpha, \varphi_1)$ 在坐标系 S_{ml} 中的表达式

$$\mathbf{r}_{ml}(\alpha, \varphi_1) = \mathbf{M}_{01}(\varphi_1) \mathbf{r}_1(\alpha, \varphi_1) = \begin{bmatrix} x_{ml}(\alpha) & y_{ml}(\alpha) & 1 \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

根据式(17)中的待定系数 D_3 、 D_4 , 可推导出啮合线方程的通用表达式

$$\left. \begin{aligned} x_{ml}(\alpha) &= -D_3 \sin(\alpha + \varphi_1) + D_4 \cos(\alpha + \varphi_1) \\ y_{ml}(\alpha) &= D_3 \cos(\alpha + \varphi_1) + D_4 \sin(\alpha + \varphi_1) - r_1 \\ z_{ml}(\alpha) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

3 啮合特性分析

3.1 压力角

3.1.1 任意啮合点的压力角 压力角是衡量齿轮副传力性能好坏的重要参数, 影响齿轮的几何尺寸、受力情况和传动强度。压力角定义为齿廓上某点的法向与线速度方向的夹角(取锐角)。如图6所示, 复合摆线齿廓曲线 Σ_1 与共轭齿廓曲线 Σ_2 在点 G 啮合, 点 G 对应的角度参量为 α_g , 在齿廓曲线 Σ_1 上点 G 的速度 v_{g1} 与正压力 F 所在直线的夹角 α_{g1} , 即为齿轮1的任意啮合点压力角^[13], 其表达式为

$$\alpha_{g1} = \arctan \left| \frac{K_v - K_n}{1 + K_v K_n} \right| \quad (20)$$

式中: K_v 为 v_{g1} 所在直线的斜率, $K_v = -x_1(\alpha_g)/y_1(\alpha_g)$; K_n 为正压力 F 所在直线的斜率, $K_n = -dx_1(\alpha_g)/dy_1(\alpha_g)$ 。

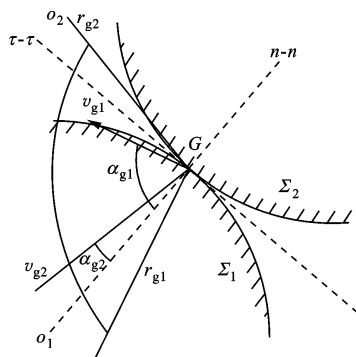


图6 复合摆线共轭传动齿轮副的压力角

对于图 6 中的三角形 o_1o_2G , 根据余弦定理可得到直线 o_1G 和 o_2G 的夹角

$$\xi=\arccos\left(\frac{r_{g1}^2+r_{g2}^2-a^2}{2r_{g1}r_{g2}}\right)\tag{21}$$

式中: r_{g1} 为啮合点 G 到齿轮 1 的轴心 o_1 的距离 $\overline{o_1G}$; r_{g2} 为啮合点 G 到齿轮 2 的轴心 o_2 的距离 $\overline{o_2G}$ 。

根据图 6 中 α_{g1} 、 α_{g2} 和 ξ 的几何关系, 可得到共轭齿廓曲线 Σ_2 在啮合点 G 处的压力角

$$\alpha_{g2}=|\xi+\alpha_{g1}-\pi|\tag{22}$$

3.1.2 分度圆压力角 若 G 点在 Σ_1 的分度圆上, 则可得到几何关系

$$x_1^2(\alpha_g)+y_1^2(\alpha_g)=\left(\frac{mz_1}{2}\right)^2\tag{23}$$

由式(8)(9)(13)(20)(21)和(23), 可求得 Σ_1 在分度圆上的压力角

$$\alpha_{p1}=\arctan|2f_1-[2(h_a^*+c^*)]^{-1}|\tag{24}$$

当齿轮副中心距为标准中心距时, 节圆和分度圆重合, 当啮合点 G 位于中心距连线上, 即 G 点与节点 P 重合时, 可得到几何关系

$$r_{g1}+r_{g2}=a\tag{25}$$

由式(9)(22)(24)和(25), 可推导出 Σ_2 的分度圆压力角

$$\alpha_{p2}=\arctan|2f_1-[2(h_a^*+c^*)]^{-1}|\tag{26}$$

定义 h_f^* 为齿根高系数, 则 $h_f^*=h_a^*+c^*$, 根据式(24)~(26), 可得到复合摆线齿轮副分度圆的压力角

$$\alpha_p=\alpha_{p1}=\alpha_{p2}=\arctan|2f_1-(2h_f^*)^{-1}|\tag{27}$$

3.1.3 压力角分析 由式(27)可知, 复合摆线齿廓曲线分度圆上的压力角只与齿根高系数 h_f^* 和齿形调控系数 f_1 有关。齿形调控系数 f_1 取 0~0.06, 可求得分度圆压力角 α_p 随 h_f^* 的变化曲线, 如图 7 所示。

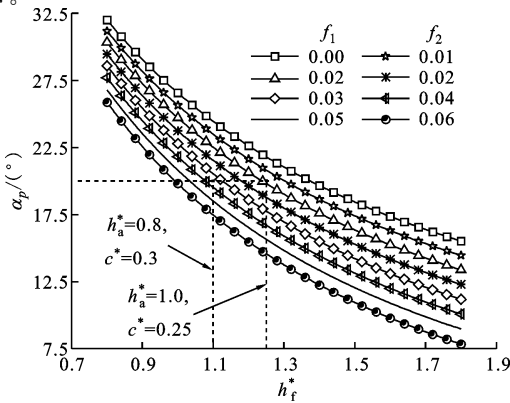


图 7 齿根高系数对压力角的影响

从图 7 中可以看出, 当 h_f^* 确定(即齿高确定)时, 分度圆压力角随齿形调控系数的增大而减小, 这同时也表明, 复合摆线齿廓在同一齿高下可以有不同的压力角设计, 便于根据实际工况进行优化。

为方便比较传统渐开线齿轮与复合摆线齿轮的传动特性, 取渐开线常用的齿高齿制(常用齿取 $h_a^*=1.0$, $c^*=0.25$; 短齿取 $h_a^*=0.8$, $c^*=0.30$), 求得 2 种齿制下复合摆线齿轮副的分度圆压力角随齿形调控系数的变化曲线, 如图 8 所示。

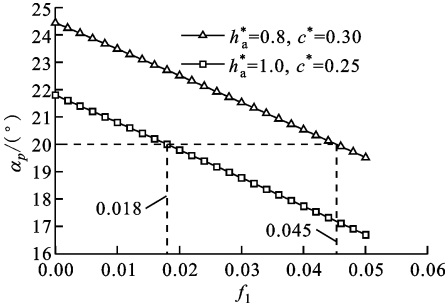


图 8 齿形调控系数对压力角的影响

由于渐开线齿廓的常用压力角 $\alpha_p=20^\circ$, 相应地可求得此压力角下复合摆线齿廓的齿形调控系数 f_1 , 见表 2。选取模数 $m=4\text{ mm}$, 齿数 $z=20$, 齿顶高系数 $h_a^*=1.0$, 顶隙系数 $c^*=0.25$, 可求得图 9 所示的复合摆线与渐开线齿廓曲线。从图 9 可以看出, 复合摆线齿廓的齿根部位厚度明显大于渐开线齿廓的, 理论上具有较大的抗弯强度。

表 2 齿形参数

$\alpha_p/(\text{^\circ})$	h_a^*	c^*	f_1
20	1.0	0.25	0.018
20	0.8	0.30	0.045

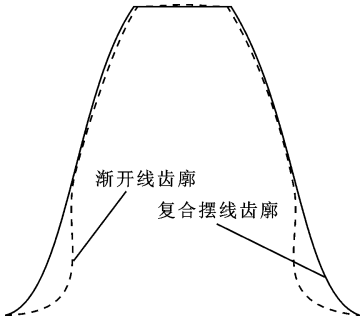


图 9 复合摆线齿形设计

3.2 曲率

3.2.1 曲率模型 齿廓曲率模型是评价齿轮传动接触强度的基础, 也是齿轮强度计算标准的重要组成部分。如图 10 所示, 复合摆线齿廓 Σ_1 与其共轭齿廓 Σ_2 上任一啮合点 Q (其角度参量为 α_v) 的曲率

分别用 k_1 和 k_2 表示。根据微分几何,可得到 k_1 的表达式

$$k_1 = \frac{|\mathbf{r}'_1(\alpha_v) \times \mathbf{r}''_1(\alpha_v)|}{|\mathbf{r}'_1(\alpha_v)|^2} = \frac{x'_1(\alpha_v)y''_1(\alpha_v) - x''_1(\alpha_v)y'_1(\alpha_v)}{[x'^2_1(\alpha_v) + y'^2_1(\alpha_v)]^{3/2}} \quad (28)$$

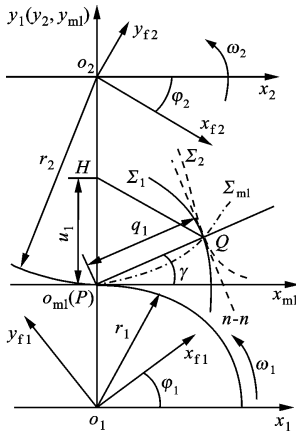


图10 共轭齿廓的几何曲率关系

根据式(13)(28),可化简得到曲率 k_1 的表达式

$$k_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{u_1 r_1 \sin \gamma}{q_1^2 (r_1 + u_1)} = \frac{q_1 (r_1 + u_1) - u_1 r_1 \sin \gamma}{q_1^2 (r_1 + u_1)} \quad (29)$$

式中: u_1 为 H 到节点 P 的距离, H 为啮合点 Q 所在啮合线处的法线与 y_1 轴的交点; q_1 为啮合点 Q 到节点 P 的距离。 u_1 、 q_1 的表达式为

$$u_1 = y_{m1}(\alpha_v, \varphi_1) + x_{m1}(\alpha_v, \varphi_1) \frac{dx_{m1}(\alpha_v, \varphi_1)}{dy_{m1}(\alpha_v, \varphi_1)} \quad (30)$$

$$q_1 = [x_{m1}^2(\alpha, \varphi_1) + y_{m1}^2(\alpha, \varphi_1)]^{1/2} \quad (31)$$

根据 Euler-Savary 公式^[14],得到共轭齿廓曲线曲率 k_1 和 k_2 的关系如下

$$\frac{1}{k_1 - q_1} + \frac{1}{k_2 + q_1} = \frac{1}{(r_1 + r_2) \sin \gamma} \quad (32)$$

由式(29)~式(32),可推导出 Σ_2 的曲率

$$k_2 = \frac{(r_1 + r_2)(k_1 - q_1) \sin \gamma}{k_1 - q_1 - (r_1 + r_2) \sin \gamma} - q_1 \quad (33)$$

联立式(29)(30)(31)(33),可求得 k_1 和 k_2 。

3.2.2 曲率分析 取齿轮参数 $m=4.5$ mm, $z_1/z_2=16/24$, 利用数值软件 MATLAB 可求得 $h_a^*=1.0$ 、 $c^*=0.25$ 和 $h_a^*=0.8$ 、 $c^*=0.3$ 两种齿高齿制下 Σ_1 和 Σ_2 的曲率随齿形调控系数的变化曲线,如图11、图12所示。从图中可以看出:

(1)复合摆线齿廓 Σ_1 及共轭齿廓 Σ_2 都存在曲率为0的点,该点是曲线的拐点,也是曲线凹凸性的分界点,即齿廓 Σ_1 、 Σ_2 均由凸弧和凹弧组成,且传动过程始终为凹凸齿廓接触,有利于提高接触疲劳强

度。同时,节圆附近的曲率极小,且变化梯度较小,有利于提高传动的承载能力和平稳性。

(2)复合摆线齿廓曲率很小,且随着齿形调控系数的减小,齿廓 Σ_1 、 Σ_2 的曲率差也相应减小,所以当齿高参数确定时,宜选取较小的齿形调控系数。

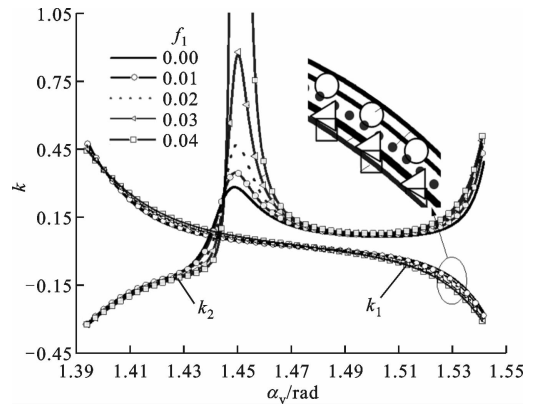


图11 $h_a^*=1.0$ 、 $c^*=0.25$ 时 f_1 对齿廓曲率的影响

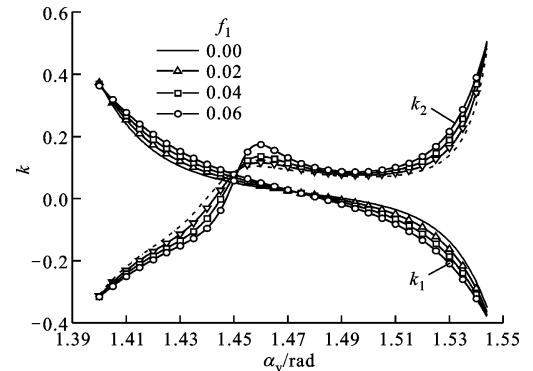


图12 $h_a^*=0.8$ 、 $c^*=0.3$ 时 f_1 对齿廓曲率的影响

3.3 重合度

3.3.1 重合度模型 重合度是衡量齿轮副传动连续性、载荷传递均匀性的重要度量指标。如图13所示,曲线 M_2N_2 为复合摆线主动齿轮1的工作齿廓 Σ_1 , 齿轮2的齿廓 Σ_2 是 Σ_1 的共轭齿廓, 曲线 M_1M_2 为复合摆线共轭传动的啮合线 Σ_{m1} , 点 M_1 是 Σ_{m1} 与齿轮1齿顶圆的交点, 点 M_2 是 Σ_{m1} 与齿轮2齿顶圆的交点, 点 M_1 、 M_2 对应的角度参量分别为 φ_a 、 φ_b 。当啮合点 M 从 M_2 移动到 M_1 时, 主动轮转过的角度 $\Delta\alpha = \alpha_a - \alpha_b$, 则新型复合摆线齿轮副的重合度

$$\epsilon_a = \frac{\alpha_a - \alpha_b}{2\pi/z_1} \quad (34)$$

根据几何关系 $o_1o_{m1} + o_{m1}M_0 = o_1M_0$, 可得

$$y_{m1}(\alpha_a) + r_1 = r_{a1} \sin(\pi - \alpha_a) \quad (35)$$

对于三角形 $o_1M_1o_2$, 由余弦定理可得

$$a^2 + \frac{x_{m1}^2(\alpha_b)}{\cos^2 \alpha_b} - r_{a2}^2 = 2a \frac{x_{m1}(\alpha_b) \cos(\pi/2 - \alpha_b)}{\cos \alpha_b} \quad (36)$$

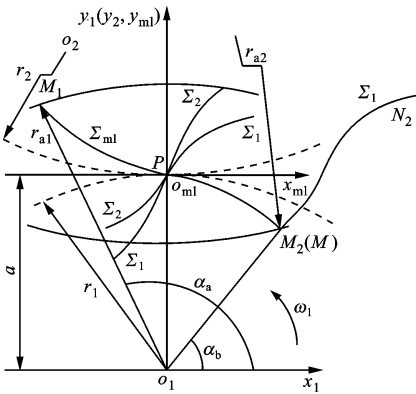


图 13 复合摆线齿轮副重合度的几何关系

由方程(35)(36)可分别求得 φ_a 、 φ_b , 然后代入方程(34)可求得重合度。

3.3.2 重合度分析 根据建立的重合度模型,可求得相同参数下复合摆线与渐开线齿轮副的重合度 ϵ_{a1} 、 ϵ_{a2} ,如表 3 所示。计算中取 $h_a^*=1.0$, $c^*=0.25$, $\alpha_p=20^\circ$ 。

表 3 齿轮副的重合度

m/mm	z_1	z_2	i	ϵ_{a1}	ϵ_{a2}
1	24	29	1.208 3	1.642 8	1.623 9
3	17	33	2.062 5	1.621 5	1.594 5
5	18	55	3.058 8	1.681 3	1.650 3
7	22	90	4.090 9	1.735 5	1.710 5
9	23	119	5.173 9	1.752 3	1.731 1

由表 3 中的算例结果可知,复合摆线齿轮副的重合度明显大于传统渐开线齿轮的重合度,理论上具有更高的传动平稳性和载荷承载能力。

3.4 滑动率

3.4.1 滑动率模型 齿廓间较大的相对滑动易产生齿面磨损、胶合,增加功率损耗。为了提高齿轮传动性能,必须尽可能地减少齿面间的相对滑动。如图 14 所示,复合摆线齿廓 Σ_1 及其共轭齿廓 Σ_2 在某个瞬时啮合于 W 点(其角度参量为 α_s),经过时间 Δt 后, Σ_1 上的 W_1 点与 Σ_2 上的 W_2 点啮合,此时啮合点 W 在 Σ_1 、 Σ_2 上走过的弧长分别为 Δs_1 、 Δs_2 ,滑动弧长为 $\Delta s_2 - \Delta s_1$,则 Σ_1 、 Σ_2 在啮合点 W 的滑动率 σ_1 、 σ_2 ^[15] 分别为

$$\sigma_1 = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta s_1 - \Delta s_2}{\Delta s_1} = \left(\frac{ds_1}{dt} - \frac{ds_2}{dt} \right) / \frac{ds_1}{dt} = \frac{ds_1 - ds_2}{ds_1} \quad (37)$$

$$\sigma_2 = \lim_{\Delta s_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta s_2 - \Delta s_1}{\Delta s_2} = \left(\frac{ds_2}{dt} - \frac{ds_1}{dt} \right) / \frac{ds_2}{dt} = \frac{ds_2 - ds_1}{ds_2} \quad (38)$$

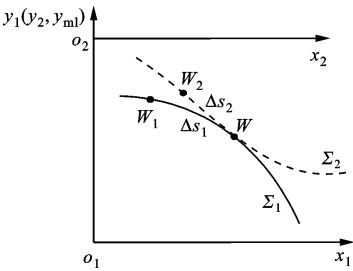


图 14 滑动率几何模型

由啮合方程(15)、啮合线方程(19)可推导出滑动率的通用表达式

$$\sigma_1 = \frac{(1 + i_{21})E_1E_2}{E_1E_3} \quad (39)$$

$$\sigma_2 = \frac{(1 + i_{21})E_1E_2}{E_1E_4} \quad (40)$$

式中

$$E_1 = \begin{bmatrix} \partial_{\varphi_1} f(\alpha_s, \varphi_1) & -\partial_{\alpha} f(\alpha_s, \varphi_1) \\ \partial_{\alpha} y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) & \partial_{\alpha} x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) \\ \partial_{\varphi_1} y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) & \partial_{\varphi_1} x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) \end{bmatrix}$$

$$E_2 = [y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) \quad x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)]^T$$

$$E_3 = [r_1 + y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) \quad x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)]^T$$

$$E_4 = [i_{21}y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1) - r_1 \quad i_{21}x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)]^T$$

其中 $\partial_{\alpha} x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)$ 、 $\partial_{\varphi_1} x_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)$ 、 $\partial_{\alpha} y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)$ 和 $\partial_{\varphi_1} y_{ml}(\alpha_s, \varphi_1)$ 是啮合线方程(19)的偏导表达式,根据啮合方程(15)可求得 φ_1 与 α_s 的关系 $\varphi_1 = g(\alpha_s)$ 。

3.4.2 滑动率分析 选取齿轮参数: $m=3\text{ mm}$, $z_1/z_2=32/73$, $\alpha_p=20^\circ$ 。利用数值软件 MATLAB 计算出 2 种齿高齿制下复合摆线齿轮副的滑动率,如图 15 所示。图 16、图 17 是根据文献[15]求得的同参数渐开线齿轮副的滑动率随实际啮合线位置 q_1 的变化曲线。

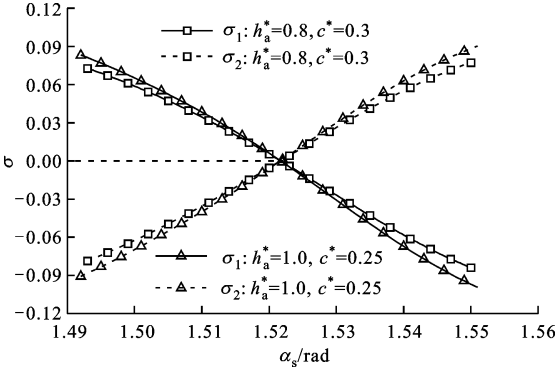


图 15 复合摆线齿轮副的滑动率

从图 15 可以看出,复合摆线齿轮在整个啮合传动过程中,最大滑动率出现在轮齿啮入和啮出时的齿根位置,滑动率绝对值的最大值低于 0.1,在节点

附近趋近于 0。与图 16、图 17 所示的渐开线齿轮副的滑动率相比,复合摆线齿轮副的滑动率下降了近 9/10,且在啮合极限点处滑动率仍极小,故在相同载荷下齿面磨损较小,有利于提高传动效率。

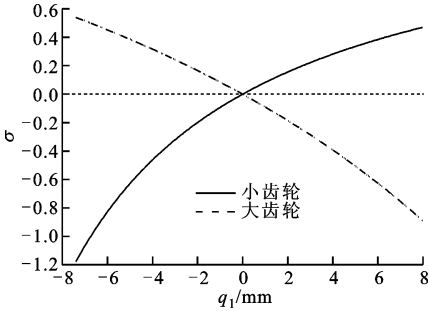


图 16 $h_a^* = 1.0$ 、 $c^* = 0.25$ 时渐开线齿轮副的滑动率

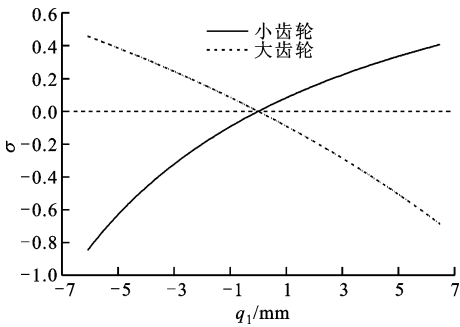


图 17 $h_a^* = 0.8$ 、 $c^* = 0.3$ 时渐开线齿轮副的滑动率

4 齿轮副实体模型构建与强度特性分析

4.1 齿轮副实体模型构建

根据 FZG 齿轮试验机的参数要求,设计出复合摆线齿轮副的基本参数,如表 4 所示。利用数值软件 MATLAB 计算出齿轮副的齿廓曲线数据,并导入三维建模软件 SolidWorks,创建出精确的三维实体模型,如图 18 所示。同时,在 SolidWorks 中进行啮合仿真,结果显示复合摆线齿轮副在传动过程中能够实现连续线接触传动,且无啮合干涉现象。齿轮副实体模型的成功建立充分说明,新型复合摆线共轭传动理论与方法是可行的。

表 4 复合摆线齿轮副的基本设计参数

a/mm	m/mm	$\alpha_p/(\text{^\circ})$	i_{21}	z_1
91.5	4.575	20	0.68	16
z_2	h_a^*	c^*	h	f_1
24	1	0.25	0.625	0.018
c_1/mm	c_2/mm	b/mm		
2.859 4	0.051 47	20		

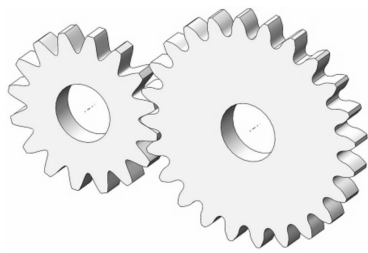


图 18 复合摆线齿轮副实体模型

4.2 强度特性分析

由于复合摆线齿廓的几何特殊性,利用解析法很难求得精确的弯曲应力和接触应力,而有限元法对齿廓形状没有限制,有着解析法不具备的优点,可以更精确、方便地分析复合摆线齿轮的强度特性,非常适用于非标准齿形的齿轮^[16]。采用 4.1 节中的建模方法,选取和渐开线齿轮相同的参数:材料选用 40Cr,弹性模量 $E=209\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.29$;模数 $m=4\text{ mm}$,压力角 $\alpha_p=20^\circ$,齿数 $z_1/z_2=16/24$,齿宽 $b=12\text{ mm}$ 。小齿轮输入转速和扭矩分别为 $1\,000\text{ r/min}$ 、 $60\text{ N}\cdot\text{m}$ 。利用有限元法求解复合摆线齿轮副的弯曲和接触应力,结果如图 19、图 20 所示。

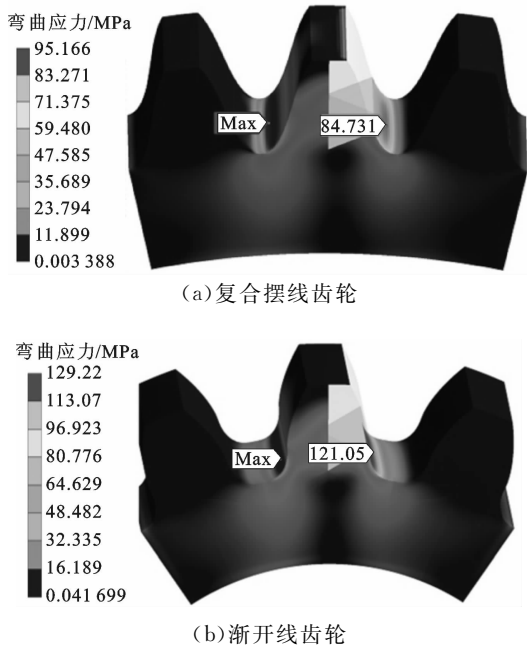


图 19 齿根的弯曲应力云图

从图 19 可以看出,渐开线齿轮齿根的最大压应力、最大拉应力分别为 129.22 MPa 和 121.05 MPa ,而相同负载下的复合摆线齿轮齿根的最大压应力、最大拉应力分别为 95.166 MPa 和 84.731 MPa ,分别下降了 26.35% 和 30.00% ,即在相同模数下,采用复合摆线齿轮传动副可以提高齿轮的弯曲强度,有利于减小齿轮的尺寸和质量,提高齿轮的刚度。

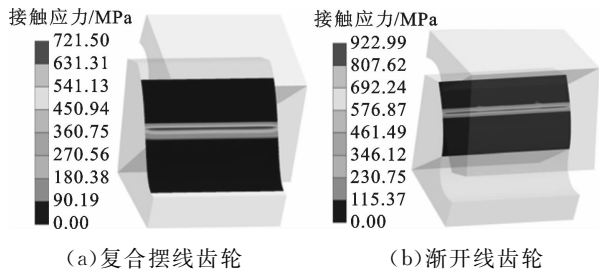


图 20 齿面的接触应力云图

从图 20 可以看出,齿面接触应力沿齿宽均匀分布,复合摆线齿轮、渐开线齿轮的齿面接触应力分别为 721.50 和 922.99 MPa,即在相同模数下,复合摆线齿轮的接触应力下降了 21.83%,因此采用复合摆线齿轮传动可以有效提高齿面的接触强度。

5 齿轮副样件加工及传动效率试验

为了进行复合摆线齿轮副的传动试验评价,根据 FZG 齿轮试验机的参数要求,采用第 4 节中设计的复合摆线齿轮副参数(见表 4),利用电火花慢走丝加工出复合摆线齿轮副试验样件,并进行了传动效率测试,同时,对 FZG 试验机配套的渐开线齿轮副也进行了传动效率测试,试验结果如图 21 所示。该渐开线齿轮副与复合摆线齿轮副具有相同的齿数、模数、压力角、齿顶高系数和顶隙系数。在传动效率测试过程中,复合摆线齿轮副传动平稳,运转良好。当小齿轮端加载扭矩为 T_1 时,相应地可测出电机转速(大齿轮转速)在 2 000、3 000 和 4 000 r/min 时大齿轮端的扭矩 T_2 。 T_1 、 T_2 由扭矩传感器测量,并在试验机的在线监测测量系统上显示。齿轮副传动效率 η 的计算公式为

$$\eta = \frac{T_1 \omega_2}{T_2 \omega_1} \times 100\% \quad (41)$$

齿轮副的传动效率随加载扭矩的变化曲线见图 21。

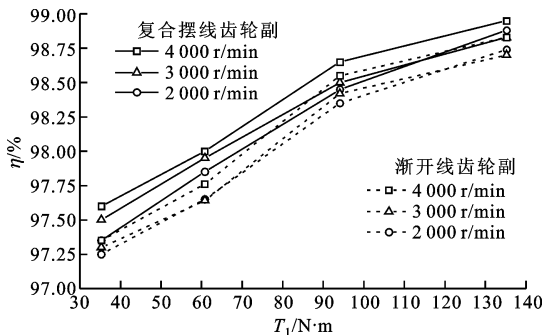


图 21 复合摆线和渐开线齿轮副的传动效率曲线

从图 21 可以看出,复合摆线齿轮副的传动效率随加载扭矩在 97.30%~99.00% 的范围内呈正相

关变化,且高于同工况下的渐开线齿轮副,可见其传动效率较高,具有工程应用价值。同时,尽管复合摆线齿轮样件为慢走丝线切割加工且未进行磨齿处理,齿轮精度不太高,而渐开线齿轮为精磨齿轮,齿轮精度相对较高(5 级),但是即使在加工精度处于劣势的情况下,复合摆线齿轮副样件的传动效率仍高于渐开线齿轮副的传动效率,如果后期采用滚齿、精磨等适合批量生产的高精度加工方法,会进一步提高传动效率。

6 结 论

本文提出了广义摆线成形轨迹的二连杆等效机构转化方法,推导了 $n+1$ 连杆机构的广义 n 阶摆线运动规律,提出了可用于齿轮传动的新型四阶复合摆线齿廓曲线构建方法;进一步推导出了复合摆线共轭齿廓曲线及啮合线的通用表达式,研究了复合摆线齿轮副的压力角、曲率、重合度、滑动率等啮合特性;建立了精确的复合摆线齿轮副三维实体模型,并加工了齿轮副试验样件,利用 FZG 齿轮试验机测得了齿轮副在不同工况下的传动效率。本文的研究获得以下结论。

(1)复合摆线齿轮副的压力角只与齿根高系数和齿形调控系数有关,当齿根高系数确定(即齿高确定)时,压力角随齿形调节系数的增大而减小,即在同一齿高下可有不同的压力角设计。

(2)相对于渐开线齿轮,复合摆线齿轮传动具有以下优势:传动过程始终为凹凸接触,有利于降低接触应力;重合度较大,传动平稳性和载荷承载能力较好;滑动率下降了近 9/10,有利于减轻齿面磨损;齿根弯曲强度和齿面接触强度更高。

(3)复合摆线齿轮副的传动效率高于同工况下渐开线齿轮副的传动效率,具有工程应用价值。

后续将开展复合摆线齿轮滚切、插削和磨削等加工制造方法的研究,利用 FZG 齿轮试验机评价复合摆线齿轮传动的疲劳特性,以期为新型复合摆线齿轮传动奠定应用基础。

参考文献:

[1] 秦大同. 国际齿轮传动研究现状 [J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2014, 37(8): 1-10.
QIN Datong. Review of research on international gear transmissions [J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2014, 37(8): 1-10.

(下转第 131 页)